

پاسخنامه تشریحی

۱

۳ نفر خاص، قبلاً انتخاب شده‌اند، پس باید ۲ نفر دیگر را از بین ۶، $(۶ - ۳ = ۳)$ نفر باقی‌مانده انتخاب کنیم. چون ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست به کمک فرمول ترکیب محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالت‌های انتخاب} = \binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{(۶-۲)! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۲ \times ۱} = ۱۵$$

۲

$$\frac{P(A)}{P(A')} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow \frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{۵}{۱۲} \Rightarrow ۱۲P(A) = ۵ - ۵P(A) \Rightarrow ۱۷P(A) = ۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۷}$$

۳

الف

$$\text{تعداد اعداد چهار رقمی} = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۹۶$$

ب

$$\begin{aligned} \text{تعداد اعداد زوج پنج رقمی} &= ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times \frac{۱}{\text{رقم یکان صفر باشد}} \\ &+ ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times \frac{۳}{\text{رقم یکان صفر نباشد}} = ۲۴ + ۵۴ = ۷۸ \end{aligned}$$

۴

الف

$$\text{تعداد} = \binom{۵}{۳} \binom{۶}{۱} = ۱۰ \times ۶ = ۶۰$$

ب

$$\text{تعداد} = \binom{۶}{۳} \binom{۵}{۱} + \binom{۶}{۴} = ۲۰ \times ۵ + ۱۵ = ۱۱۵$$

پ

$$\text{تعداد} = \binom{۵}{۲} \binom{۶}{۲} = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$$

۵

الف

$$\begin{aligned} n(S) &= \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۶} = ۲۲۰ \\ n(A) &= \binom{۴}{۲} \binom{۸}{۱} + \binom{۴}{۳} = ۶ \times ۸ + ۴ = ۵۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۵۲}{۲۲۰} \end{aligned}$$

ب

$$n(B) = \binom{۸}{۳} = ۵۶ \Rightarrow P(B) = \frac{۵۶}{۲۲۰}$$

۶

$$\begin{aligned} n(S) &= \binom{۶}{۲} = ۱۵ \\ A &= \{\{1, ۴\}, \{۲, ۳\}\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۱۵} \end{aligned}$$

مجموع شماره‌های دو گوی ۵ باشد.

۷

$$\begin{aligned} P(B) &= ۱ - P(B') = ۱ - \frac{۷}{۱۷} = \frac{۱۰}{۱۷} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{۲}{۱۵} = \frac{۴}{۱۵} + \frac{۳}{۱۷} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۱۷} \end{aligned}$$

الف

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times \frac{۱}{\text{رقم یکان ه است.}} + ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times \frac{۲}{\text{رقم یکان ۲ یا ۴ باشد.}} = ۳۶ + ۲۴ = ۶۰$$

ب

$$\frac{۲}{\text{رقم هزارگان ۳ یا ۴ باشد.}} \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۴۸$$

۹

$$P(n, ۲) = \frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$$

$$P(n, ۲) + ۵n = ۶۰ \Rightarrow n(n-۱) + ۵n = ۶۰ \Rightarrow n^۲ + ۴n - ۶۰ = ۰ \Rightarrow (n-۶)(n+۱۰) = ۰$$

$$\Rightarrow n = ۶ \text{ یا } n = -۱۰ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۶$$

۱۰

$$\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$$

۱۱

طبق اصل ضرب داریم $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$

۱۲

نمونه اول:

$$\binom{۵}{۳} + \binom{۶}{۲} = \binom{۵}{۲} + \binom{۶}{۱}$$

درون کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی وجود دارد، دو مهره به تصادف و هم‌زمان از این کیسه بیرون می‌آوریم. تعداد حالت‌هایی را تعیین کنید که مهره هم‌رنگ باشند.

نمونه دوم:

یک آزمون شامل ۶ سوال تستی و ۵ سوال تشریحی است. به چند حالت می‌توان به سه سوال تشریحی یا دو سوال تستی پاسخ داد.

۱۳

الف ۱۰

۱۴ روش اول:

$$۲۴ + ۳۶ = ۶۰ \text{ تعداد کل حالت‌ها}$$

$$۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴ \text{ حالت اول که رقم سمت راست صفر باشد}$$

$$۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۳۶ \text{ حالت دوم که رقم سمت راست ۲ یا ۴ باشد}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۹۶ : \text{ همه اعداد چهاررقمی} \\ ۹۶ - ۳۶ = ۶۰ : \text{ اعداد چهاررقمی زوج} \\ ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ = ۳۶ : \text{ اعداد فرد چهاررقمی} \end{cases}$$

۱۵

$$P(A) = \frac{۵! \times ۲!}{۶!} = \frac{۱}{۳}$$

۱۶

با توجه به صورت سؤال، برای آنکه اعداد موردنظر بزرگ‌تر از ۵۰۰ باشند در رقم صدگان یکی از ارقام ۵، ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می‌تواند قرار بگیرد و در حالت کلی برای اینکه مجموع ارقام یکان و دهگان ۸ باشد مجموعه اعداد $\{(۰, ۸), (۱, ۷), (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴)\}$ را خواهیم داشت، بنابراین داریم:

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{۵, ۶, ۷, ۸, ۹} \boxed{۸} \boxed{۰} \Rightarrow ۵ \times ۱ \times ۱ = ۵$$

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \quad \boxed{\circ} \quad \boxed{1} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان صفر یا ۸ باشد ۱۰ حالت است، به همین ترتیب برای مجموعه ارقام $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$ نیز همین روند را داریم:

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۱ یا ۷ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۲ یا ۶ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۳ یا ۵ باشد، ۱۰ حالت است.

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \quad \boxed{4} \quad \boxed{4} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر خواهد بود با: $10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$

17

در ابتدا چون می‌توان به هر سؤال به ۵ حالت پاسخ داد (یکی از گزینه‌ها انتخاب شود یا بدون پاسخ (سفید) بماند). پس:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{\text{5 } n} = 5^n = 3125$$

$$\Rightarrow \mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^{\mathfrak{d}} \Rightarrow n = \mathfrak{d}$$

سه سؤال اضافه شود و شرط پاسخ گویی به تمام سؤالات را داشته باشیم:

$$\underbrace{r \times r \times r \times r \times r \times r \times r \times r}_{16} = r^{16} = r^{16}$$

۱۸ در دو حالت رقم‌های زوج و فرد یک‌درمیان قرار می‌گیرند:

۴! × ۴! = تعداد کلمات ⇒ ف ز ف ز ف ز ف ز: حالت اول

$4! \times 4! = \text{تعداد کلمات} \Rightarrow \text{ز ف ز ف ز ف ز ف : حالت دوم}$

جواب = $2 \times 4 \times 4!$

19

الف

۲, ۴, ۶ , ۱, ۳, ۵, ۷
۲ شیء

$$\text{تعداد اعداد مطلوب} = 2! \times 3! \times 4! = 2 \times 6 \times 24 = 288$$

ب

تعداد اعداد مطلوب = $\overline{\text{رقم زوج}} \times 5 \times 4 \times 3 \times \overline{\text{رقم فرد}} = 720$.

۲۰. اگر رقم یکان را صفر در نظر بگیریم تعداد حالات عبارت است از: $5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60$

اگر رقم یکان را ۸ در نظر بگیریم تعداد حالات عبارت است از: $4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48$

تعداد کل حالات: $60 + 48 = 108$

راه حل دوم: با توجه به ارقام داده شده در سوال داریم:

تعداد کل اعداد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری $= 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

$192 = 4 \times 4 \times 3 \times 4 =$ تعداد اعداد فرد چهار رقمی با ارقام غیر تکراری

$$300 - 192 = 108 = \text{تعداد اعداد زوج چهار رقمی با ارقام غیر تکراری}$$